UFAL – IM – 2013.1
Cálculo 3 – Lista 1
Vetores e Funções Vetoriais

1-1 Dado o triângulo $\triangle ABC$, $A = (3, -1, -1)$, $B = (1, 2, -7)$ e $C = (-5, 14, -3)$, encontre $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cujo traço coincida com

(a) a mediana que passa por A.

(b) a bissetriz do ângulo interno B.

(c) a altura traçada por A.

1-2 Seja $\triangle ABC$ um triângulo escaleno tal que a altura relativa ao lado BC, h_{BC}, tenha comprimento igual à metade do comprimento de BC. Mostre que o ângulo interno $\widehat{A}$ é agudo. O que ocorre se $\triangle ABC$ é isósceles, com AB e AC sendo seus lados iguais?

1-3 Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer. Indique por

$$a = \|C - B\|\,,\ b = \|C - A\| \ \text{ e } \ c = \|B - A\|\,,$$

os seus lados.

(a) Considere a bissetriz interna que sai de C e toca o lado AB em X (veja figura a seguir). Prove o teorema da bissetriz interna:

$$\frac{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AX}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BX}\right\|}.$$

(b) Mostre que

$$X - C = \frac{1}{a+b} V,$$

onde $V = -aC + b(B - C)$ é paralelo à bissetriz de que sai de C.

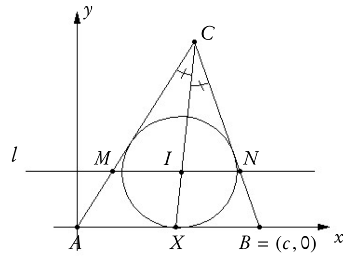
(c) Mostre que

$$Y - A = \frac{1}{b+c} W,$$

onde

$$W = c(C - A) + b(B - A)$$

é paralelo à bissetriz de que sai de A, e Y é o ponto de BC onde tal bissetriz toca.



(d) Seja I o incentro de $\triangle ABC$, isto é, I é o centro do círculo inscrito em $\triangle ABC$, ou, alternativamente, o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos internos de $\triangle ABC$. Mostre que

(i)

$$\overrightarrow{CI} = \frac{1}{a+b+c}(-aC + b(B - C)).$$

(ii)

$$\frac{\left\|\overrightarrow{CI}\right\|}{\left\|\overrightarrow{CX}\right\|} = \frac{a+b}{a+b+c}.$$

(e) Seja l a reta paralela ao lado AB e que passa pelo incentro I. Esta reta intercepta o lado AC em M e o lado BC em N. Mostre que

$$\left\|\overrightarrow{CM}\right\| + \left\|\overrightarrow{MN}\right\| + \left\|\overrightarrow{NC}\right\| = a + b.$$

1-4 Sejam P e Q dois pontos de $\mathbb{R}^3$, com $P \neq Q$. Seja $M = (P+Q)/2$ o ponto médio do segmento de reta $[P,Q]$. O plano que passa por M e é perpendicular ao vetor $Q-P$ é chamado *plano mediador de* $[P,Q]$, e será denotado por $\Pi_{[P,Q]}$.

(a) Mostre que

$$\Pi_{[P,Q]} = \{X \in \mathbb{R}^3;\ X\cdot(Q-P) = \frac{1}{2}(\|Q\|^2 - \|P\|^2)\}.$$

(b) Conclua que $X \in \Pi_{[P,Q]}$ se, e somente se, $\|X-P\| = \|X-Q\|$.

(c) Mostre que a distância de um ponto $Y \in \mathbb{R}^3$ a $\Pi_{[P,Q]}$ é dada por

$$d(Y,\Pi_{[P,Q]}) = \frac{|2Y\cdot(Q-P) - (\|Q\|^2 - \|P\|^2)|}{2\|Q-P\|}.$$

1-5 Sejam $P_1 = (2,2,3)$, $P_2 = (1,3,3)$, $P_3 = (1,2,4)$ e $P_4 = (1,1,3)$ quatro pontos em $\mathbb{R}^3$.

(a) Encontre o plano mediador $\Pi_{[P_1,P_2]}$.

(b) Encontre o plano mediador $\Pi_{[P_1,P_3]}$.

(c) Encontre o plano mediador de $\Pi_{[P_1,P_4]}$.

(d) Calcule a interseção $\Pi_{[P_1,P_2]} \cap \Pi_{[P_1,P_3]} \cap \Pi_{[P_1,P_4]}$.

(e) Obtenha a esfera que contém os pontos P_1, P_2, P_3 e P_4.

1-6 Seja $T:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear cuja matriz com relação às bases canônicas é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 9 & -1 \\ 2 & -5 & 11 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Mostre que T é sobrejetiva.

(b) Conclua que o núcleo de T, $N(T)$, tem dimensão 1. Encontre uma base para $N(T)$.

(c) Dado $Y_0 \in \mathbb{R}^3$, seja $X_0 \in \mathbb{R}^4$ tal que $T(X_0) = Y_0$ (Por que existe X_0?). Mostre que $T^{-1}(Y_0)$ é a reta de $\mathbb{R}^4$ que passa por X_0 e é paralela a $V = (-11,-3,1,1)$.

(d) Parametrize a reta $T^{-1}(5,7,14)$.

(e) Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} x - 3y + 4z - 2w = 5 \\ x - y + 9z - w = 7 \\ 2x - 5y + 11z - 4w = 14. \end{cases}$$

1-7 Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Verifique que A tem posto 2.

(b) Conclua que $Im(T)$, a imagem de

$$\begin{aligned} T:\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ X &\longmapsto T(X) = AX, \end{aligned}$$

é um plano, e $N(T)$ é uma reta.

(c) Encontre uma equação para $Im(T)$ e parametrize a reta $N(T)$.

(d) Encontre uma condição necessária e suficiente sobre a tripla (a,b,c) para que o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c. \end{cases}$$

seja compatível, isto é, tenha solução.

1-8 Sejam $P = (2,-2,1)$ e α a reta $\alpha(t) = (1+2t, 2-3t, -3+2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Seja π o plano que contém $\{P\} \cup \operatorname{tr}\alpha$.

(a) Encontre $g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que parametrize π.

(b) Encontre uma definição implícita para π.

(c) Encontre $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que o plano π coincida com o seu gráfico.

1-9 Sejam $Q = (-3,4,-2,11)$, $P = (5,-3,2,6)$ e $A = (2,-1,0,1)$ pontos do $\mathbb{R}^4$ e L a reta que passa por P e é paralela a A.

(a) Se $X = P + tA \in L$, mostre que $d(Q,X) = \sqrt{6t^2 + 36t + 154}$.

(b) Mostre que existe um único ponto $M \in L$ tal que a distância $f(t) = d(Q,X)$ é mínima.

(c) Mostre que o vetor $M - Q$ é ortogonal à reta L.

(d) Considere o hiperplano H ortogonal a L e que passa por Q. Mostre que $X = (x,y,z,t) \in H \iff 2x - y + t - 1 = 0$, $H \cap L = \{M\}$ e calcule a distância de P a H.

(e) Encontre funções $g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ para as quais o hiperplano H é imagem, gráfico e superfície de nível, respectivamente.

1-10 Mostre que $\alpha(t) = (t, \sqrt{8 + 2t - t^2}, t+4)$, $-2 \leq t \leq 4$, é uma curva plana contida no cilindro $(x-1)^2 + y^2 = 9$. Esboce o traço de α.

1-11 Esboce o traço das seguintes curvas parametrizadas.

(a) $\alpha(t) = (c + a\cos t, d + b \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$.

(b) $\alpha(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b \neq 0$.

(c) $\alpha(t) = (1 + \cos t, \operatorname{sen} t, 2\operatorname{sen}(t/2))$, $t \in \mathbb{R}$.

1-12 Identifique e esboce o traço de cada superfície parametrizada, indicando as respectivas curvas coordenadas.

(a) $f(u, v) = (\cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v)$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

(b) $g(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$, $0 < u < 2\pi$ e $v \in \mathbb{R}$.

(c) $g(u, v) = (v\cos u, v\operatorname{sen} u, v)$, $0 < u < 2\pi$ e $v > 0$.

(d) $g(u, v) = (v\cos u, v\operatorname{sen} u, v^2)$, $0 < u < 2\pi$ e $v > 0$.

(e) $g(u, v) = (2\cos v\cos u, 2\cos v \operatorname{sen} u, \operatorname{sen} v)$, $0 < u < 2\pi$ e $v \in \mathbb{R}$.

(f) $f(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$, $u, v \in \mathbb{R}$.

(g) $g(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \operatorname{sen} u, v)$, $0 < u < 2\pi$ e $v \in \mathbb{R}$.

1-13 Determine e esboce o maior subconjunto Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$, de (a) a (g), e $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ em (h) e (i)) de modo que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ esteja bem definida.

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2(x - 1)}$.

(b) $f(x, y) = \operatorname{arcsen}(x/2) + \sqrt{xy}$.

(c) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - y^2}$.

(d) $f(x, y) = \log(x\log(y - x))$.

(e) $f(x, y) = |x|\sqrt{x - 1}$.

(f) $f(x, y) = 1/\left(x^2 + y^2\right)$.

(g) $f(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$.

(h) $f(x, y, z) = x^{(y^z)}$.

(i) $f(x, y, z) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - b^2}}$, $a^2 \geq b^2$.

1-14 Em cada caso, esboce o gráfico $G(f)$ da função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada.

(a) $z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, $D = \mathbb{R}^2$.

(b) $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$, $D = \mathbb{R}^2$.

(c) $z = f(x, y) = 2 - y^2$, $D = \mathbb{R}^2$.

(d) $z = f(x, y) = \begin{cases} 1, & |x| < |y| \\ 0, & |x| \geq |y| \end{cases}$, $D = \mathbb{R}^2$.

(e) $z = f(x, y) = \operatorname{sen} x$, $D = \mathbb{R}^2$.

(f) $z = f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $D = B[4] - \{(0, 0)\}$.

(g) $z = f(x, y) = 1/\left(x^2 + y^2\right)$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

(h) $z = f(x, y) = (y - x)^2$, $D = \mathbb{R}^2$.

(i) $z = f(x, y) = \operatorname{sen}(y - x)$, $D = \mathbb{R}^2$.

(j) $z = f(x, y) = (2x + y)^3$, $D = \mathbb{R}^2$.

1-15 Esboce os seguintes conjuntos definidos implicitamente pela função f dada.

(a) $f(x, y) = x^2y = 1$.

(b) $f(x, y) = (x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2 = 0$.

(c) $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 = 0$.

(d) $f(x, y) = x^2 + 4y^2 = 4$.

(e) $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(f) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 = 0$.

(g) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 = 4$.

(h) $f(x, y, z) = (xyz, x + y) = (0, 1)$.

(i) $f(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2, y + z\right) = (1, 1)$.

1-16 A temperatura $T(x, y)$ do ponto (x, y) de uma chapa metálica é dada pela função $T(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 15$. Encontre a equação da *isoterma* (curva de temperatura constante) que passa pelo ponto $(1, 3)$ e esboce tal curva de nível.

1-17 Mostre que a aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x - y, x + y)$, é a composta da homotetia de razão $\sqrt{2}$ com a rotação de ângulo $\pi/4$.

Lista 1
Sugestões & Respostas

1-1

(a) $\alpha(t) = A + t(5, -9, 4)$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) $\alpha(t) = B + t(-1, 3, 8)$, $t \in \mathbb{R}$

(c) $\alpha(t) = A + t(62, -75, 318)$, $t \in \mathbb{R}$.

1-2 Usando Geometria Analítica: ponha $A = (0, h)$, $B = (-a, 0)$ e $C = (b, 0)$, onde $2h = a + b$. Agora mostre que $X \cdot Y > 0$, onde $X = B - A$ e $Y = C - A$.

1-3

(a) Você pode supor que $A = O$, $B = (c, 0)$. Agora, calcule X. É só parametrizar a bissetriz, lembrando que ela é paralela ao vetor

$$V = \frac{A - C}{\overline{AC}} + \frac{B - C}{\overline{BC}} = -\frac{C}{\|C\|} + \frac{B - C}{\|B - C\|} = -\frac{C}{b} + \frac{B - C}{a}.$$

Portanto, podemos supor que $V = -aC + b(B - C)$. Logo, a bissetriz que sai de C é parametrizada por $C + tV$, $t \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$X = (x, 0) = x(1, 0) = x\frac{B}{c} = C + tV = C + t(-aC + b(B - C)),$$

para algum t. Como B e C são linearmente independentes, deduza que $x = \frac{bc}{a+b}$. Donde,

$$X = (\frac{bc}{a + b}, 0).$$

(d) Trabalhando, também, com a bissetriz que sai de A, note que existem constantes u e v tais que

$$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = u\overrightarrow{AY} + v\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AC}.$$

A partir daí, usando (b) e (c), descubra que

$$I - C = \frac{1}{a + b + c}(-aC + b(B - C)).$$

(e) Use o teorema da bissetriz interna olhando para a bissetriz que sai de C, algumas semelhanças (por exemplo $\triangle ANC \sim \triangle MIC$) e o resultado anterior.

1-4

(b) Eleve ao quadrado ambos os membros de $\|X - P\| = \|X - Q\|$, e use (a).

1-5

(a) $\Pi_{[P_1,P_2]} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad -x + y = 1\}$.

(d) $\Pi_{[P_1,P_2]} \cap \Pi_{[P_1,P_3]} \cap \Pi_{[P_1,P_4]} = \{(1, 2, 3)\}$.

(e) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$.

1-6

(a) Verifique que as 3 primeiras colunas de A são linearmente independentes.

(b) $N(T) = \text{ger}\{V\}$, onde $V = (-11, -3, 1, 1)$.

(d) Note que $T(-61, -14, 6, 0) = (5, 7, 14)$. Assim, $T^{-1}(5, 7, 14)$ coincide com o traço da curva parametrizada (reta) $\alpha(t) = (-61 - 11t, -14 - 3t, 6 + t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

1-7

(b) $Im(T) = \{(x, y, z);\ 5x - 2y - z = 0\}$ e $N(T) = \{t(-4, 5, 2);\ t \in \mathbb{R}\}$.

(d) $5a - 2b - c = 0$.

1-8

(a) $g(u, v) = P + u(-1, 4, -4) + v(2, -3, 2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $\pi :\ 4x + 6y + 5z - 1 = 0$.

(c) Explicite z como função de (x, y). LOgo, $f(x, y) = (1 - 4x - 6y)/5$.

1-9

(b) Considere $(f(t))^2$ cujo ponto crítico é $t_0 = -3$. Portanto, o mínimo de f deve ocorrer aí, o valor mínimo de f é 10 e ponto de L é dado por $M = P - 3A = (-1, 0, 2, 3)$

(d) $d(P, H) = d(P, M) = 3\sqrt{6}$.

(e) $g(x, y, z) = (x, y, z, 1-2x+y)$, $f(x, y, z) = 1-2x+y$, $h(x, y, z, t) = 2x-y+t$.

1-10 O traço de α está contido no plano $z = x + 4$. Seu traço é parte de uma elipse.

1-11

(c) Verifique tr $\alpha \subset S^2(2) \cap C$, onde C é o cilindro $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

1-12

(a) Hemisfério superior da esfera S^2.

(b) Cilindro circular reto.

(c) Cone de geratriz $z = x$, $y = 0$.

(d) Parabolóide de revolução.

(e) Elipsóide de revolução.

(f) Cone de uma folha.

(g) Catenóide: superfície de revolução da catenária.

1-13

(a) $\Omega = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup ([1, +\infty) \times \mathbb{R})$.

(b) $\Omega = ([-2, 0) \times [0, -\infty)) \cup ([0, 2) \times [0, +\infty))$.

(d) $\Omega = \{(x, y);\ y > x + 1,\ x > 0\} \cup \{(x, y);\ x < y < x + 1,\ x < 0\}$.

(g) Ω é a região do primeiro quadrante situada acima do eixo-x e abaixo da parábola $y = x^2$.

(h) $\Omega = (0, +\infty) \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}$.

1-14

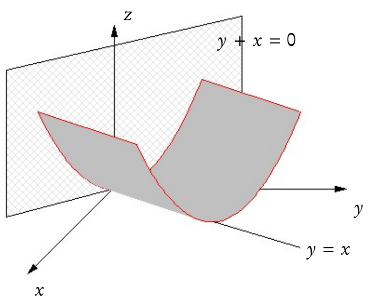
(a) Parabolóide.

(c) Cilindro sobre a parábola $z = 2 - y^2$, $x = 0$.

(f) Hemisfério.

(g) Superfície de revolução da curva $z = 1/x^2$, $y = 0$.

(h) Cilindro sobre uma parábola do plano $y + x = 0$.



(i) Cilindro sobre uma senóide do plano $y + x = 0$.

1-15

(b) pontos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.

(c) Círculo.

(d) Elipse.

(e) Esfera.

(g) Cilindro.

(h) A união de três retas: $x = 1$ e $y = 0$, $x + y = 1$ e $z = 0$, $y = 1$ e $x = 0$.

(i) Circunferência de centro $(0, 1/2, 1/2)$ e raio $\sqrt{2}/2$.

1-16 Elipse $2x^2 + 3y^2 = 29$.

1-17 Observe que $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\operatorname{sen}(\pi/4) \\ \operatorname{sen}(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}$.

Referências Bibliográficas

[1] Adonai, J., and Carlos, A. *Notas de Aulas de Cálculo*. MAT-UFAL, Maceió-Al, 2003.

[2] Lang, S. *Cálculo,* volume 2 (tradução de Genésio dos Reis). Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro-Gb, 1970.

[3] Williamson, R. E., Crowell, R. H., and Trotter, H. F. *Álgebra Linear e Cálculo Diferencial* (tradução de Genésio dos Reis e Angela Costales), volume 1. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1974.

[4] Kaplan, W., and Lewis, D. *C álculo e Álgebra Linear*. Editora Universidade de Brasília – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro-RJ, 1974.